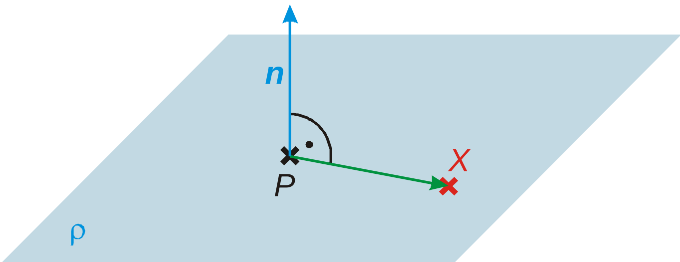
7.4.4 Obecná rovnice roviny I



Vektor $X-P$ je kolmý na normálový vektor $\boldsymbol{n}$ $\Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový:
$(X-P)\cdot\boldsymbol{n}=0$ (stejně jako při odvozování obecné rovnice přímky).

Př. 1: Je dán bod P a vektor $\boldsymbol{n}$. Najdi rovnici, kterou splňují body roviny, která prochází bodem P a má normálový vektor $\boldsymbol{n}$. Příklad řeš nejdříve konkrétně pro bod $P[-2;3;2]$ a vektor $\boldsymbol{n}=(1;-1;4)$ a poté obecně do dvou sloupců vedle sebe.

Body: $X[x;y;z]$, $P[-2;3;2]$.

Vektory: $(X-P)=(x+2;y-3;z-2)$,

$\boldsymbol{n}=(1;-1;4)$.

Skalární součin je nulový: $(X-P)\cdot\boldsymbol{n}=0$.

$(x+2;y-3;z-2)(1;-1;4)=0$

$1\cdot(x+2)-1\cdot(y-3)+4(z-2)=0$

$x+2-y+3+4z-8=0$

$x-y+4z-3=0$

Body: $X[x;y;z]$, $P[p_1;p_2;p_2]$.

Vektory: $(X-P)=(x-p_1;y-p_2;z-p_3)$,

$\boldsymbol{n}=(a;b;c)$.

Skalární součin je nulový: $(X-P)\cdot\boldsymbol{n}=0$.

$(x-p_1;y-p_2;z-p_3)(a;b;c)=0$

$a(x-p_1)+b(y-p_2)+c(z-p_3)=0$

$ax-ap_1+by-bp_2+cz-cp_3=0$

$ax+by+cz-ap_1-bp_2-cp_3=0$

$ax+by+cz+d=0$

Př. 2: Najdi obecnou rovnici roviny σ, která je rovnoběžná s rovinou ρ z předchozího příkladu a prochází bodem $S[1;3;-2]$. Porovnej rovnice obou rovin.

$\boldsymbol{n}=(1;-1;4)$ $\Rightarrow$ rovnice $x-y+4z+d=0$ Dosadíme bod $S[1;3;-2]$: $1-3+4(-2)+d=0$.

$\sigma: x-y+4z+10=0$

Př. 3: Najdi obecnou rovnici roviny ABC: $A[2;1;3]$, $B[3;3;1]$, $C[1;2;5]$. Dosazením všech bodů do rovnice zkontroluj správnost výsledku.

$\boldsymbol{u}=B-A=(1;2;-2)1;2$ $\boldsymbol{v}=C-A=(-1;1;2)-1;1$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(4+2;2-2;1+2)=(6;0;3)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(2;0;1)$

Rovnice: $2x+z+d=0$. Dosadíme bod A: $2\cdot2+0\cdot1+3+d=0$ $\Rightarrow$ $d=-7$.
Rovina ABC má rovnici: $2x+z-7=0$.
Zkusíme další body: $B[3;3;1]$: $2\cdot3+1-7=0$ $C[1;2;5]$: $2\cdot1+5-7=0$.

Př. 4: Najdi obecnou rovnici roviny ρ, která je kolmá na přímku $p = \{[1-t; 3-2t; 3t]; t \in R\}$ a prochází bodem $A[1;2;3]$. Urči, zda v rovině ρ leží body $K[0;2;-2]$ a $L[-2;1;3]$.

Rovina ρ je kolmá na přímku *p* $\Rightarrow$ směrový vektor přímky *p* je normálovým vektorem roviny ρ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}_\rho = (1;2;-3)$. Rovnice roviny: $x + 2y - 3z + d = 0$.

Dosadíme bod $A[1;2;3]$: $1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = 4$. $\rho : x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Dosadíme bod $K[0;2;-2]$: $0 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow$ bod *K* neleží v rovině ρ.

Dosadíme bod $L[-2;1;3]$: $-2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 4 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ bod *L* neleží v rovině ρ.

Př. 5: Najdi obecnou rovnici roviny *ABC*: $A[1;1;-2]$, $B[1;3;-3]$, $C[0;1;1]$. Dopočítej souřadnice bodů $M[0;?;2]$ a $N[?;1;?]$ tak, aby oba body ležely v rovině *ABC*.

$\boldsymbol{u} = B - A = (0;2;-1)\,0;2$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{v} = C - A = (-1;0;3)\,-1;0$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (6-0; 1-0; 0-(-2)) = (2;1;2) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (6;1;2)$

Rovnice: $6x + y + 2z + d = 0$. Dosadíme bod $C[0;1;1]$: $6 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

Obecná rovnice roviny *ABC*: $6x + y + 2z - 3 = 0$.

Dosadíme bod $M[0;y;2]$: $2 \cdot 0 + y + 2 \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ souřadnice bodu $M[0;-1;2]$.

Dosadíme bod $N[x;1;z]$: $6x + 1 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow 3x + z = 1 \Rightarrow$ zvolíme souřadnici *x* a *z* dopočítáme $x = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$ souřadnice bodu $N[0;1;1]$.

Dodatek: Volbu hodnoty *x*-ové souřadnice můžeme provést také obecně a získat tak všechna možná řešení pro hledání souřadnic bodu *N*: $x = t \Rightarrow z = 1 - 3t \Rightarrow$ souřadnice bodu $N[t;1;1-3t], t \in R$. Nalezené body tvoří přímku ležící v rovině *ABC*.

Př. 6: Najdi průsečík roviny $\rho : 2x + y + 2z - 2 = 0$ s přímkou $p = \{[1+t; -2; 3-2t], t \in R\}$.

$2(1+t) - 2 + 2(3-2t) - 2 = 0 \quad\quad 2 + 2t - 2 + 6 - 4t - 2 = 0 \quad\quad 4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2$

$$\begin{aligned} x &= 1 + t = 1 + 2 = 3 \\ y &= -2 \quad\quad \Rightarrow P[3;-2;-1]. \\ z &= 3 - 2t = 3 - 2 \cdot 2 = -1 \end{aligned}$$

Př. 7: Jsou dány přímky $p = \{[1-t; 3-2t; 3t]; t \in R\}$ a $q = \{[-t; 3; 2+t].t \in R\}$. Najdi obecnou rovnici roviny ρ, která obsahuje přímku *p* a je rovnoběžná s přímkou *q*.

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_p = (-1;-2;3)\,-1;-2$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_q = (-1;0;1)\,-1;0$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (-2-0; -3+1; 0-2) = (-2;-2;-2) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (1;1;1)$

Rovnice: $x + y + z + d = 0$. Dosadíme bod $P[1;3;0]$: $1 + 3 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -4$

Obecná rovnice roviny $\rho : x + y + z - 4 = 0$.

Př. 8: Petáková:
strana 115/cvičení 19 a) c)
strana 116/cvičení 20 a)